Chapitre 13

Limite, continuité

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre :
- I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point.
- $\bar{I}$ est l'ensemble qui contient I ainsi que les extrémités de I, idem pour $\bar{J}$.
- $\mathring{I}$ est l'ensemble qui contient I privé des extrémités de I.

Dans ce chapitre, si l'intervalle I est non majoré (resp. non minoré), on inclura $+\infty$ (resp. $-\infty$) dans $\bar{I}$.

Exemple 1. Si $I =]0,2]$, alors $\bar{I} =$ .... et $\mathring{I} =$ .... Si $I = [1,+\infty[$, alors $\bar{I} =$ .... et $\mathring{I} =$ ....

1 Définition de limite d'une fonction

1.1 Notion de voisinage

On considère une propriété $\mathcal{P}$ susceptible d'être vérifiée ou non par une fonction. Par exemple $\mathcal{P}$ peut être "f est croissante" ou "f est positive".

Définition 13.1

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $J \subset I$. On dit que f vérifie $\mathcal{P}$ sur J si la restriction $f|_J$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

Exemple 2. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, sur $\mathbb{R}_-^*$, mais pas sur $\mathbb{R}^*$.
La fonction $x \mapsto \ln x$ est bornée sur $[1,2]$ mais pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

Définition 13.2 (Voisinage (HP))

Soit $V \subset \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

- ($a = +\infty$) On dit que V est un voisinage de $+\infty$ s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $V = [M, +\infty[$.
- ($a = -\infty$) On dit que V est un voisinage de $-\infty$ s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $V =]-\infty, M]$.
- (a fini) On dit que V est un voisinage de a s'il existe $\eta > 0$ tel que $V = [a-\eta, a+\eta]$.

Pour $a \in \overline{\mathbb{R}}$, on notera $\mathcal{V}_a$ l'ensemble qui contient tous les voisinages de a.

Exemple 3.

$$\mathbb{R}_+ \in \mathcal{V}_{\dots\dots} \qquad V \in \mathcal{V}_{+\infty} \iff \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$[0,1] \in \mathcal{V}_{\dots\dots} \qquad U \in \mathcal{V}_2 \iff \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Remarque. La notion de voisinage n'est pas au programme de MPSI. Elle est introduite ici pour simplifier considérablement certains énoncés et vous donner un peu de recul sur la notion de limite. Par ailleurs, la véritable définition est plus complexe : par exemple $V \in \mathcal{V}_\pi$ signifie en fait $\quad \exists \eta > 0 \qquad [\pi-\eta, \pi+\eta] \subset V$ (et non $=$). Ainsi, $\mathbb{R}_+$ ou encore $[-7,5]$ sont aussi des voisinages de π. Toutefois cette distinction ne sera pas nécessaire en pratique.

Définition 13.3

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \overline{I}$.

On dit que f vérifie la propriété $\mathcal{P}$ au voisinage de a s'il existe $V \in \mathcal{V}_a$ tel que f vérifie $\mathcal{P}$ sur $I \cap V$. De manière équivalente :

- ($a = +\infty$) f vérifie $\mathcal{P}$ au voisinage de $+\infty$ s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que f vérifie $\mathcal{P}$ sur $I \cap [A, +\infty[$.
- ($a = -\infty$) f vérifie $\mathcal{P}$ au voisinage de $-\infty$ s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que f vérifie $\mathcal{P}$ sur $I \cap]-\infty, A]$.
- (a fini) f vérifie $\mathcal{P}$ au voisinage de a s'il existe $\delta > 0$ tel que f vérifie $\mathcal{P}$ sur $I \cap [a-\delta, a+\delta]$.

Remarque. La définition ci-dessus est au programme !

Exemple 4. Montrer les assertions suivantes :

1. ln est positive au voisinage de $+\infty$.
2. Pour tout $a \in]1, +\infty[$, ln est strictement positive au voisinage de a.
3. cos n'est pas croissante au voisinage de $+\infty$.

1. La fonction ln est définie sur $I = \mathbb{R}_+^*$. Alors, en posant par exemple $A = 2$,

$$I \cap [A, +\infty[= [2, +\infty[$$

et pour tout $x \geq 2$, on a bien $\ln x \geq \ln 2 \geq 0$. Donc ln est positive au voisinage de $+\infty$.

1.2 Définition de limite

Grâce aux voisinages, on peut écrire la définition de limite en une fois, au lieu de considérer neuf cas (!). Cependant, cette formulation avec les voisinages est hors-programme en MPSI.

Cette partie est laissée vide intentionnellement.

Définition 13.4 (Limite finie ou infinie, en un point de $\overline{I}$ (HP))

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a si

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell \quad \exists U \in \mathcal{V}_a \quad \forall x \in I \qquad (x \in U \implies f(x) \in V)$$

On note alors $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$, ou bien $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, ou encore $\lim\limits_{a} f = \ell$.

On dit parfois aussi “f tend vers ℓ en a”. L’interprétation est que $f(x)$ peut être aussi “proche” de ℓ que l’on souhaite (i.e. dans un voisinage V de ℓ aussi petit que l’on souhaite) à condition que x soit suffisamment “proche” de a (i.e. dans un voisinage U de a suffisamment petit).
Cette définition se décline en différentes formes selon que a ou ℓ soit fini, $+\infty$ ou $-\infty$.

Déclinaison selon que ℓ soit fini ou infini

$\ell = -\infty$	$\ell = +\infty$	$\ell \in \mathbb{R}$
	$V \in \mathcal{V}_\ell$ ssi ...	
il existe $B \in \mathbb{R}$ tq ...	il existe $B \in \mathbb{R}$ tq ...	il existe $\varepsilon > 0$ tq ...
$V =]-\infty, B]$	$V = [B, +\infty[$	$V = [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$
	L’assertion $\quad \forall V \in \mathcal{V}_\ell \quad (\ldots) \quad f(x) \in V \quad$ se réécrit ...	
$\forall B \in \mathbb{R} \quad (\ldots) \quad f(x) \in]-\infty, B]$	$\forall B \in \mathbb{R} \quad (\ldots) \quad f(x) \in [B, +\infty[$	$\forall \varepsilon > 0 \quad (\ldots) \quad f(x) \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$
i.e. $\forall B \in \mathbb{R} \quad (\ldots) \quad f(x) \leq B$	i.e. $\forall B \in \mathbb{R} \quad (\ldots) \quad f(x) \geq B$	i.e. $\forall \varepsilon > 0 \quad (\ldots) \quad \lvert f(x) - \ell \rvert \leq \varepsilon$

Déclinaison selon que a soit fini ou infini

$a = -\infty$	$a = +\infty$	$a \in \mathbb{R}$
	$U \in \mathcal{V}_a$ ssi ...	
il existe $A \in \mathbb{R}$ tq ...	il existe $A \in \mathbb{R}$ tq ...	il existe $\delta > 0$ tq ...
	L’assertion $\quad \exists U \in \mathcal{V}_a \quad (\ldots) \quad x \in U \quad$ se réécrit ...	

1.3 Limite finie en $a \in \bar{I}$

Définition 13.5 (Limite finie (version officielle))

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \bar{I}$, et $\ell \in \mathbb{R}$ (donc fini).

- ($a = +\infty$) On a $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$ si :

- ($a = +\infty$) On a $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} \ell$ si :

- (a fini) Lorsque a est fini, on a $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ si :

Exemple 5. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ tend vers 0 en $+\infty$.

Exemple 6. Montrer que $\sqrt{x} \xrightarrow[x \to 1]{} 1$.

Remarque. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Que a soit fini ou infini, on a :

- $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, la propriété $\mathcal{P}_\varepsilon : |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ est vraie au voisinage de a.
- $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ si et seulement si $|f(x) - \ell| \xrightarrow[x \to a]{} 0$.

Propriété 13.6

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f admet une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.

Démonstration. On fait la preuve uniquement lorsque a est fini.

□

1.4 Limite infinie en $a \in \bar{I}$

Définition 13.7 (Limite infinie (version officielle))

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \bar{I}$.

- ($a = +\infty$) On a $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ si :

- ($a = +\infty$) On a $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$ si :

- (a fini) Lorsque a est fini, on a $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$ si :

Ces énoncés s'adaptent également lorsque la limite vaut $-\infty$. Par exemple, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ équivaut à

On remarquera qu'on peut remplacer "$\forall B \in \mathbb{R}$" par "$\forall B \leq 0$" sans changer la valeur de vérité de cette proposition. De même, on peut remplacer "$\exists A \in \mathbb{R}$" par "$\exists A \geq 0$".

Exemple 7. Montrer que $\sqrt{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Exemple 8. Montrer que $\ln(1+x) \xrightarrow[x\to-1]{} -\infty$.

Remarque. Pour tout $a \in \bar{I}$, on a :

- $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ si et seulement si, pour tout $B \in \mathbb{R}$, la propriété $\mathcal{P}_B : f(x) \geq A$ est vraie au voisinage de a.
- Si f a une limite infinie en a, alors f n'est pas bornée au voisinage de a.

1.5 Unicité de la limite

Propriété 13.8 (Unicité de la limite)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \bar{I}$. Pour tous $\ell_1, \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, si

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_1 \qquad \text{et} \qquad f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_2$$

alors $\ell_1 = \ell_2$. Autrement dit **la** limite de f en a, si elle existe, est unique.

Cette proposition justifie, lorsque la limite existe, l'écriture "$\lim_{x\to a} f(x)$" : cela ne correspond qu'à une seule et unique valeur (dans $\overline{\mathbb{R}}$).

Démonstration. On ne fait la preuve que pour le cas $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ et a fini.

□

2 Propriété des limites

2.1 Caractérisation séquentielle

Théorème 13.9 (Caractérisation séquentielle de la limite)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \bar{I}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(*i*) $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

(*ii*) Pour toute suite (x_n) à valeurs dans I, si $x_n \to a$, alors $f(x_n) \to \ell$.

Démonstration. On ne fait la preuve que pour le cas où a et ℓ sont finis.
Montrons que (*ii*) implique (*i*). Supposons par l'absurde que (*i*) soit fausse. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall \delta > 0 \quad \exists x \in I \qquad |x - a| \leq \delta \qquad \text{et} \qquad |f(x) - \ell| > \varepsilon$$

La valeur de ε étant fixée, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si on prend $\delta = \dfrac{1}{n}$, il existe donc $x_n \in I$ tel que

$$|x_n - a| \leq \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad |f(x_n) - \ell| > \varepsilon$$

On construit ainsi une suite (x_n) telle que $|x_n - a| \to 0$ mais $|f(x_n) - \ell| > \varepsilon$, donc $|f(x_n) - \ell|$ ne tend pas vers 0. Ainsi, la suite (x_n) tend vers a mais $(f(x_n))$ ne tend pas vers ℓ. Contradiction avec *(ii)*. Ainsi, *(i)* est vraie.

□

La caractérisation séquentielle est très utile pour montrer la *non-existence* d'une limite : il suffit de trouver deux suites $(x_n), (y_n)$ à valeurs dans I qui tendent vers a mais de sorte que les expressions $f(x_n)$ et $f(y_n)$ n'ont pas la même limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Exemple 9.

1. Montrer que cos n'admet pas de limite en $+\infty$.
2. Montrer que $f : x \mapsto \lfloor -x^2 \rfloor$ n'a pas de limite en 0.

1. Supposons par l'absurde que cos admette une limite, notée ℓ, en $+\infty$. Alors pour toute suite (x_n) telle que $x_n \to +\infty$, on a $\cos(x_n) \to \ell$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2n\pi \to +\infty \quad \text{et} \quad \cos(2n\pi) = 1 \to \ell$$

$$2n\pi + \pi \to +\infty \quad \text{et} \quad \cos(2n\pi + \pi) = -1 \to \ell$$

Ainsi, $1 = \ell = -1$. Contradiction. Ainsi, cos n'a pas de limite en $+\infty$.

2.2 Limites et inégalités

Les théorèmes pour les suites ont leur équivalent pour les fonctions. La différence principale étant que la mention “à partir d'un certain rang” est en quelque sorte remplacée par “au voisinage de a”, où a est le point en lequel on regarde la limite.

Passage à la limite

Théorème 13.10 (Passage à la limite)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \bar{I}$. Si $f \leq g$ au voisinage de a, et si f, g admettent des limites (éventuellement infinies) en a, alors

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$$

Remarque.

- Comme pour les suites, il est indispensable que f et g admettent des limites avant de passer à la limite.
- Attention, en passant à la limite les inégalités deviennent larges : si $f(x) < g(x)$, alors $\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$.
- Il n'est pas nécessaire que $f \leq g$ soit vrai partout : il suffit que cela soit vrai au voisinage de a :
  - si a est fini, il suffit que $f \leq g$ sur un ensemble de la forme $I \cap]a - \delta, a + \delta[$ avec $\delta > 0$.
  - Si $a = +\infty$, il suffit que $f \leq g$ sur un ensemble de la forme $I \cap [A, +\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$.
  - Si $a = -\infty$, il suffit que $f \leq g$ sur un ensemble de la forme $I \cap] - \infty, A]$ avec $A \in \mathbb{R}$.

Résultats d'existences de limites

Théorème 13.11 (Théorème d'encadrement)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $h : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \bar{I}$. Soit $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$f \leq g \leq h \qquad \text{au voisinage de } a$$

Si $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = \ell$, alors g admet une limite en a et $\lim_{x \to a} g(x) = \ell$.

Démonstration. On ne fait la démonstration que pour $a \in \mathbb{R}$ (donc fini).

□

Comme pour les suites, le principal intérêt de ce théorème est de montrer que g admet une limite. Enfin, on dispose également d'un résultat d'encadrement "d'un seul côté" :

Propriété 13.12

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \overline{I}$. On suppose que $f \leq g$ au voisinage de a.

- Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

La méthode suivante sera justifiée par un théorème de comparaison qu'on verra ultérieurement. Elle constitue l'analogue de la méthode pour la suite.

Méthode (Limite par majoration)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ (donc fini). On souhaite montrer que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$. Si on trouve une fonction h telle que

$$\forall x \in I \qquad |f(x) - \ell| \leq h(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to a} h(x) = 0$$

alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

Note : il n'est pas nécessaire de vérifier l'inégalité ci-dessus pour tout $x \in I$. Si U est un voisinage de a, il est suffisant de les vérifier pour tout $x \in I \cap U$. On peut ensuite passer à la limite et en déduire que $|f(x) - \ell| \xrightarrow[x \to a]{} 0$.

2.3 Opérations sur les limites

On rappelle que les formes indéterminées sont :

$$+\infty - \infty \qquad 0 \times \infty \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0} \qquad 1^{\infty} \qquad 0^0 \qquad \infty^0$$

Somme et produit

Propriété 13.13 (Somme et produit de limites)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \bar{I}$. On suppose que

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}} \qquad \text{et} \qquad g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$$

Alors, **à condition que cela ne donne pas une forme indéterminée,**

$$f(x) + g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell + \ell'$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \lambda f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \lambda \ell$$

$$f(x)g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell\ell'$$

Démonstration. Montrons la propriété sur la limite de la somme et du produit dans le cas ℓ, ℓ' finis.

□

Propriété 13.14

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \overline{I}$. On suppose que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$ et g est bornée au voisinage de a. Alors $f(x)g(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$.

Démonstration. Pour tout $x \in I$, on a

$$|f(x)g(x) - 0| \leq |f(x)| \times |g(x)| = |f(x) - 0| \times |g(x)|$$

Ensuite, de manière similaire à la preuve précédente, on considère un voisinage V de a sur lequel g est bornée. Comme $|f(x) - 0| \xrightarrow[x \to a]{} 0$, les mêmes arguments que la preuve précédente conduisent au résultat. □

Inverse et quotient

On peut montrer que si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$, alors $f(x) \neq 0$ au voisinage de a. Donc la fonction $\frac{1}{f}$ est bien définie au voisinage de a.

Propriété 13.15 (Limite de l'inverse)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \overline{I}$.

1. Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \in \mathbb{R}^*$, alors $\frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x \to a]{} \frac{1}{\ell}$.
2. Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \pm\infty$, alors $\frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 0$.
3. Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$ et $f(x) > 0$ au voisinage de a, alors $\frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$.
4. Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$ et $f(x) < 0$ au voisinage de a, alors $\frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$.
5. Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$ et $f(x) \neq 0$ au voisinage de a, mais que les cas 3 et 4 ne sont pas vérifiés, alors $\frac{1}{f}$ n'a pas de limite en a.

Un quotient de fonctions peut se réécrire : $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$. On peut ainsi déduire la limite de $\frac{f}{g}$ avec les théorèmes de limites ci-dessus.

Composition

Théorème 13.16 (Composition de limites)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Soit $a \in \overline{I}$ et $b \in \overline{J}$. On suppose $f(I) \subset J$, de sorte que $g \circ f$ a un sens. Alors,

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} f(x) = b \\ \lim\limits_{y \to b} g(y) = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \end{cases} \implies \lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = \ell$$

Démonstration. Par la caractérisation séquentielle. □

3 Limite à gauche, limite à droite

On définit une nouvelle notion de limite, qui ne s'applique qu'en des points a finis.

Définition 13.17 (Limite à gauche, limite à droite)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \bar{I} \cap \mathbb{R}$ (donc a est fini).

- On suppose que $a \neq \sup I$, càd a n'est pas l'extrémité supérieure de I. Si la fonction
$$f\big|_{I\cap]a,+\infty[}$$
admet une limite en a, on l'appelle la limite à droite de f en a. On la note
$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) \qquad \text{ou} \qquad f(a^+)$$
- On suppose que $a \neq \inf I$, càd a n'est pas l'extrémité inférieure de I. Si la fonction
$$f\big|_{I\cap]-\infty,a[}$$
admet une limite en a, on l'appelle la limite à gauche de f en a. On la note
$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) \qquad \text{ou} \qquad f(a^-)$$

Si a est l'extrémité supérieure de I, alors f ne peut avoir de limite à droite en a : en effet $I\cap]a,+\infty[= \varnothing$ et cet ensemble ne vérifie pas les hypothèses pour qu'on puisse parler de limite (intervalle non vide, non singleton). Idem pour la limite à gauche en a si a est l'extrémité inférieure de I.

Exemple 10.

- $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ (avec $I = \mathbb{R}_-^*$)
- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ (avec $I = \mathbb{R}_+^*$).
- La fonction ln n'admet pas de limite à gauche en 0
- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.
- $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \lfloor x \rfloor = \dots$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \lfloor x \rfloor = \dots$

Remarque. Lorsque $a = \inf I$ et $a \notin I$, la limite à droite de f en a coïncide avec la limite "habituelle". Par exemple
$$\lim_{x\to 0} \ln x = \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$
On peut donc omettre de préciser " $\lim\limits_{x\to a^+}$ " et juste mettre "$\lim\limits_{x\to a}$". Par contre, si $a = \inf I$ et $a \in I$, cela n'est plus vrai, par exemple la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ vérifie $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$ mais n'a pas pour autant de limite en 0. Cette remarque s'adapte également dans le cas $a = \sup I$ et $a \notin I$ avec la limite à gauche en a.

Remarque. Si on utilise les notations $f(a^+)$ et $f(a^-)$, il faut bien garder à l'esprit qu'il s'agit de limites. En particulier, f n'est pas définie en a. On peut par exemple écrire $\ln(0^+) = -\infty$, bien que ln ne soit pas définie en 0.

Propriété 13.18

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \bar{I} \cap \mathbb{R}$. Si f admet une limite (finie ou non) en a, alors elle admet une limite à gauche (si $a \neq \inf I$) et une limite à droite (si $a \neq \sup I$), et toutes ces limites sont égales :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \underbrace{\lim_{x \to a^+} f(x)}_{\text{si } a \neq \sup I} = \underbrace{\lim_{x \to a^-} f(x)}_{\text{si } a \neq \inf I}$$

La réciproque est fausse :

$$\lim_{x \to 0^+} \lfloor -x^2 \rfloor = \lim_{x \to 0^-} \lfloor -x^2 \rfloor = -1 \qquad \text{mais} \qquad x \mapsto \lfloor -x^2 \rfloor \quad \text{n'a pas de limite en zéro.}$$

cf exemple 9. Cela est dû au fait que pour admettre une limite en 0 (ou en tout $a \in \mathbb{R}$), il faut que la limite existe et soit unique quelle que soit la “façon” de tendre vers 0. Or, on peut trouver deux suites (x_n) et (y_n) qui tendent vers 0 et pour lesquelles $\lfloor x_n \rfloor$ et $\lfloor y_n \rfloor$ ont des limites différentes, cf exemple 9.

3.1 Théorème de la limite monotone (fonctions)

Théorème 13.19 (Théorème de la limite monotone)

Soit $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$. Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Alors

1. f admet des limites (éventuellement infinies) en a et b, càd les limites suivantes existent :

$$\lim_{x \to a} f(x) \qquad \lim_{x \to b} f(x)$$

2. Pour tout $c \in]a, b[$, f admet des limites ***finies*** à gauche et à droite en c. De plus,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to c^-} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x \to c^+} f(x) \qquad & \text{si } f \text{ est croissante} \\ \lim_{x \to c^-} f(x) \geq f(c) \geq \lim_{x \to c^+} f(x) \qquad & \text{si } f \text{ est décroissante} \end{aligned}$$

Démonstration. On ne fait la démonstration que dans le cas f croissante. Pour le premier point, on montre uniquement que $\lim_{x \to b} f(x)$ existe (l'autre moitié se montre en adaptant la preuve).
Montrons l'assertion 1. On pose $J = f(]a, b[)$.

- Supposons J majoré. On pose
$$\ell := \sup J = \sup \{f(x) \mid a < x < b\}$$
Montrons que $\lim_{x \to b} f(x) = \ell$. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne supérieure, il existe $y \in J$ tel que $\ell - \varepsilon < y \leq \ell$. Puisque $y \in J = f(]a, b[)$, il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $y = f(x_0)$. On pose alors $\delta = b - x_0 > 0$. Soit $x \in]a, b[$. On suppose que $|x - b| \leq \delta$, ce qui ici se réécrit
$$b - \delta \leq x < b \qquad \text{ou encore} \qquad x_0 \leq x < b$$
Comme f est croissante, on en déduit que
$$f(x_0) \leq f(x)$$
Donc, comme $f(x) \leq \sup J = \ell$,
$$|f(x) - \ell| = \ell - f(x) \leq \ell - f(x_0) = \ell - y \leq \varepsilon$$
Ainsi, par arbitraire sur ε, $\lim_{x \to b} f(x) = \ell$.

□

4 Continuité en un point

La notion de continuité d'une fonction f en un point a se définit à partir de la notion de limite. Toutefois, il faut que a soit ***fini***, et d'autre part que f soit ***définie*** en a. Ainsi, pour une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, on ne peut parler de continuité qu'en un point $a \in I$.

4.1 Introduction

Définition 13.20 (Continuité en un point)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.

- On dit que f est continue en a si
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$
càd
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \qquad |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$
- Sinon, on dit que f est discontinue en a.

Exemple 11. Montrer que la fonction $x \mapsto |x|$ est continue en tout $a \in \mathbb{R}$.

Propriété 13.21 (Limite en un point de D_f entraine la continuité en ce point)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f admet une limite en $\boxed{a \in I}$, alors f est continue en a.

Démonstration.

□

Théorème 13.22 (Caractérisation séquentielle de la continuité)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- f est continue en a.
- Pour toute suite (x_n) à valeurs dans I, si $x_n \to a$, alors $f(x_n) \to f(a)$.

A nouveau, cette caractérisation permet surtout de montrer qu'une fonction n'est pas continue en un point.

Exemple 12. La fonction $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ n'est pas continue en 0.

4.2 Continuité à droite, à gauche

Définition 13.23 (Continuité à gauche, à droite)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathring{I}$.

- On dit que f est continue à droite en a si la fonction
$$f\Big|_{I \cap [a,+\infty[}$$
est continue en a, c'est-à-dire si
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$
- On dit que f est continue à gauche en a si la fonction
$$f\Big|_{]-\infty,a] \cap I}$$
est continue en a, c'est-à-dire si
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

Exemple 13. La fonction $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue à droite en 0, mais pas à gauche.

Propriété 13.24

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathring{I}$.
f est continue en a si et seulement si f est continue à gauche ET à droite en a.

Contrairement aux limites, il est donc suffisant d'être continue à gauche et à droite en a pour être continue en a.

4.3 Continuité sur un intervalle

Définition 13.25

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est continue (sur I) si f est continue en tout point de I.
On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, ou parfois juste $\mathcal{C}(I)$, l'ensemble des fonctions réelles continues sur I.

Remarque. Si $f \in \mathcal{C}(I)$, et si $J \subset I$, alors $f \in \mathcal{C}(J)$.

Par abus de langage, pour une partie $X \subset \mathbb{R}$ quelconque on dit parfois que f est continue (sur X) si f est continue en chaque point de X.

Exemple 14. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Exemple 15. La fonction tan est continue sur $D_{tan} = \mathbb{R} \setminus \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$.

Exemple 16. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

n'est pas continue (sur $\mathbb{R}$) car elle n'est pas continue en 0. En particulier, elle n'est continue ni sur $\mathbb{R}_-$, ni sur $\mathbb{R}_+$. Cependant (et c'est subtil), la restriction de f à $\mathbb{R}_+$ est continue (sur $\mathbb{R}_+$), car $f|_{\mathbb{R}_+}$ est la fonction constante égale à 1. La définition 13.3 ne s'applique donc pas à la notion de continuité [1]

4.4 Opérations et continuité

Propriété 13.26 (Somme, produit, inverse et continuité)

Soit $a \in I$. La somme, la différence, la multiplication par un réel λ, le produit, le quotient (à condition qu'il soit défini) de fonctions continues en a (resp. sur I) est encore une fonction continue en a (resp. sur I).

Propriété 13.27 (Composition et continuité)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose $f(I) \subset J$, de sorte que $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ ait un sens. Si :

1. f est continue en a (resp. sur I).
2. g est continue en $f(a)$ (resp. sur J).

Alors $g \circ f$ est continue en a (resp. sur I).

Exemple 17. Si f est continue, alors $e^{\arctan f}$, $|f|$ et f^2 sont continues.

1. Ceci est le résultat d'un choix de convention. Certains auteurs prennent la convention inverse et affirment que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ car $f|_{\mathbb{R}_+}$ l'est, bien que f elle-même ne soit pas continue en 0... En revanche, il y a consensus pour dire que $f|_{\mathbb{R}_+}$ est continue.

5 Prolongement par continuité

5.1 Définition d'un prolongement

Dans cette section, on va supposer que $a \in I$ et considérer une fonction f définie sur $I \setminus \{a\}$. L'objectif de cette section est de savoir sous quelles conditions on peut prolonger par continuité une fonction, cf définition ci-dessous.

Définition 13.28 (Prolongement par continuité)

Soit $a \in I$ et $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction continue (sur $I \setminus \{a\}$). On dit que f est <u>prolongeable par continuité en a</u> s'il existe une application $\tilde{f}$ définie et **continue** sur I qui prolonge f.
La fonction $\tilde{f}$ est appelée <u>prolongement par continuité de f en a</u>.

Autrement dit, cela veut dire qu'il existe $y_a \in \mathbb{R}$ tel que l'application suivante soit **continue** :

$$\begin{aligned} \tilde{f} :& I \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \setminus \{a\} \\ y_a & \text{si } x = a \end{cases} \end{aligned}$$

Il arrive fréquemment qu'on note également f l'application $\tilde{f}$.

Exemple 18. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et y est constante égale à 1. On peut la prolonger par continuité en 0 en posant $f(0) := 1$.

Exemple 19. Cependant, on "voit" que la fonction "signe" $f : x \mapsto \dfrac{x}{|x|} = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ ne peut pas être prolongée par continuité en 0. Si on pose $f(0) := y_0$ avec $y_0 \in \mathbb{R}$, aucune valeur de y_0 ne permet de rendre f continue sur $\mathbb{R}$.

5.2 Théorème de prolongement

Propriété 13.29 (Prolongement par continuité)

Soit $a \in I$ et $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction. f est prolongeable par continuité en a si et seulement si f admet en a une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, ce prolongement est unique et correspond à l'application

$$\begin{aligned} \tilde{f} :& I \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \setminus \{a\} \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases} \end{aligned}$$

Prolongement en un "bord" – a est une extrémité de I.

Ce cas est particulièrement simple car en étant astreint à $I \setminus \{a\}$, il n'y a qu'une seule "manière" de tendre vers a : par une limite à gauche (si $a = \sup I$) ou à droite (si $a = \inf I$). Par exemple, on pose

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^x \end{aligned}$$

et on cherche un éventuel prolongement par continuité de g en 0. Cette situation correspond à $I = \mathbb{R}_+$ et $a = 0$, de sorte que $I \setminus \{a\} = \mathbb{R}_+^*$. Il suffit donc de regarder si g admet une limite (à droite) en 0.

Exemple 20. Montrer que la fonction $g : x \mapsto x^x$ est prolongeable par continuité en 0.

Prolongement en un "trou" – a est un point de $\mathring{I}$.

Ce cas est un peu plus compliqué car en étant astreint à $I \setminus \{a\}$ il y a beaucoup de "manières" de tendre vers a, a priori. Cependant, la proposition suivante montre qu'il suffit de vérifier les limites à gauche et à droite en a pour conclure.

Propriété 13.30

Soit $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathring{I}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- La fonction f admet une limite en a
- f admet une limite à gauche et à droite en a, et $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.

De plus, lorsque ces assertions sont vérifiées, toutes ces limites sont égales :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Dans certains cas, on peut cependant se passer d'utiliser le théorème ci-dessus. On pose

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\sin x}{x} \end{aligned}$$

et on cherche un éventuel prolongement par continuité de h en 0. Cette situation correspond à $I = \mathbb{R}$ et $a = 0$, de sorte que $I \setminus \{a\} = \mathbb{R}^*$. Il suffit donc de regarder si h admet une limite en 0.

Exemple 21. Montrer que la fonction $h : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est prolongeable par continuité en 0.

6 Les grands théorèmes sur la continuité

6.1 Le TVI et ses conséquences

Théorème 13.31 (TVI : Théorème des Valeurs Intermédiaires)

Soit $f \in \mathcal{C}(I)$ et $a, b \in I$ tels que $a < b$. Alors toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$ ont un antécédent par f.

Autrement dit, pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a, b]$ tel que $y = f(x)$.

Démonstration.

□

Corollaire 13.32 (Corollaire du TVI)

Soit $f \in \mathcal{C}(I)$. Si f est strictement monotone, alors f est injective.

Autrement dit, si f est strictement monotone, pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe *un unique* $x \in [a, b]$ tel que $y = f(x)$.

Démonstration. Admise (non exigible). □

Exemple 22. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel positif x_n tel que $x_n^4 + 4x_n - n = 0$.

Corollaire 13.33

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Corollaire 13.34

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue et ne s'annule pas sur I, alors f a le même signe (strict) sur I.

6.2 Théorème des bornes atteintes et ses conséquences

On note, *lorsque cela a un sens* :

$$\sup_{x\in[a,b]} f(x) := \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\} \qquad \inf_{x\in[a,b]} f(x) := \inf\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$$

$$\max_{x\in[a,b]} f(x) := \max\{f(x) \mid x \in [a,b]\} \qquad \min_{x\in[a,b]} f(x) := \min\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$$

Théorème 13.35 (Théorème des bornes atteintes)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes.

Cela signifie qu'il existe $c, d \in [a,b]$ tels que $f(c) = \max_{x\in[a,b]} f(x)$ et $f(d) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$.

Démonstration.

□

Corollaire 13.36

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors l'image par f du segment $[a,b]$ est un segment :

$$f([a,b]) = [m,M] \qquad \text{avec} \qquad m = \min_{x\in[a,b]} f(x) \qquad \text{et} \qquad M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

Démonstration. Par définition, $m = \min f([a,b])$ et $M = \max f([a,b])$. Donc tout élément $y \in f([a,b])$ vérifie $m \leq y \leq M$ de sorte que $f([a,b]) \subset [m,M]$.
Ensuite, comme $f([a,b])$ est un intervalle et que $m, M \in f([a,b])$, on en déduit par définition d'un intervalle que $[m,M] \subset f([a,b])$. Finalement, $f([a,b]) = [m,M]$. □

6.3 Théorème de la bijection monotone

Théorème 13.37

Soit $f \in \mathcal{C}(I)$. Alors f est injective si et seulement si f est strictement monotone.

Démonstration. Admise (non exigible). □

Théorème 13.38 (Théorème de la bijection monotone)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone. Alors :

1. $f(I)$ est un intervalle.
2. f réalise une bijection de I sur $f(I)$
3. $f^{-1} : f(I) \to I$ est continue et a la même monotonie (stricte) que f.

Démonstration. Admise (non exigible). On notera que le premier point s'obtient par le corollaire 13.33, et le second du corollaire 13.32 ajouté au fait que $f : I \to f(I)$ est nécessairement surjective. □

7 Fonctions complexes

La notion de limite s'étend facilement aux fonctions $f : I \to \mathbb{C}$. Il suffit de remplacer la valeur absolue par le module. Avantage des fonctions complexe : la notion de limite infinie n'a pas de sens ! Donc il suffit de définir la notion de limite finie (i.e. dans $\mathbb{C}$).

Définition 13.39 (Limite (finie) d'une fonction complexe)

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a si $|f(x) - \ell| \xrightarrow[x \to a]{} 0$:

- Si a est fini :
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad (|x - a| \leq \delta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$
- Si $a = +\infty$:
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad (x \geq A \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$
- Si $a = -\infty$:
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad (x \leq A \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

On note à nouveau $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ ou $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

Définition 13.40 (Continuité)

Soit $f : I \to \mathbb{C}$. On suppose que $a \in I$. On dit que f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
On dit que f est continue sur I si f est continue en chaque point de I.

Remarque. Topo rapide sur ce qui est conservé (ou pas) avec des fonctions complexes :

- L'unicité de la limite (finie) est là encore garantie.
- Attention : il n'y a pas de notion de limite infinie : une fonction complexe ne peut pas "tendre vers $\pm\infty$".
- Les caractérisations séquentielles (limite et continuité) sont valables, avec le même énoncé.
- Les sommes, produits, inverses et quotients sur les limites et la continuité restent vraies. Pour la composée $g \circ f$, les hypothèses sont $f : I \to \boxed{\mathbb{R}}$ et $g : J \to \mathbb{C}$ avec J un intervalle de $\boxed{\mathbb{R}}$. La fonction f est donc réelle, seule g est une fonction à valeurs complexes.

Théorème 13.41

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction.

- f admet une limite (finie) en a si et seulement si $\mathrm{Re} f$ et $\mathrm{Im} f$ admettent des limites finies en a, et dans ce cas
$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \mathrm{Re}(f(x)) + i \lim_{x \to a} \mathrm{Im}(f(x))$$
- f est continue en a (resp. sur I) si et seulement si $\mathrm{Re} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont continues en a (resp. sur I).